מרתון ליניארית 22.6

משפטים:

דטרמיננטה של מטריצה A: . ניתן לחישוב רק אם A מטריצה ריבועית.  
מחושבת ע"י פיתוח שורה/עמודה. לדוגמא: אם  *אז:*

*ומכאו: .*

*חישוב ע"י מכפלות:*

*דטרמיננטה של מטריצה משולשת (מעל האלכסון הראשי יש רק אפסים או מתחת לאלכסון הראשי יש רק אפסים): , .*

*אסור לדרג סתם ככה ואז לחשב דטרמיננטה.*

*אם מחליפים שורות או עמודות – מכפילים במינוס את הדטרמיננטה.*

*אם כופלים שורה בקבוע אז כופלים את הדרמיננטה בהופכי.*

*אם מורידים/מוסיפים משורה כפולה של שורה אחרת – לא עושים כלום.*

*דוגמא:*

*דוגמא:*

*תכונות:*

* *מטריצה הפיכה אם ורק אם .*
* *אם הפיכה אז:*
* *.*
* *כאשר הוא מספר השורות/ העמודות במטריצה.*

*מטריצה משוחלפת: החלפת העמודות בשורות והשורות בעמודות.*

*אם אז .*

אם אז המטריצה נקראת סימטרית.

אם אז המטריצה נקראת אנטי סימטרית.

מערכת משוואות:

מטריצה מייצגת מערכת של משוואות.

מספר המשתנים במשוואה זה מספר העמודות ה-מטריצה ומספר המשוואות זה מספר השורות.

דוגמא: ניתן לייצג ע"י: .

מדרגים את המטריצה ומוצאים פתרונות.

אם הוקטור בצד ימין הוא וקטור ה 0 (מכיל רק אפסים) אז המערכת נקראת הומוגנית.

אחרת המערכת לא הומוגנית.

למערכת יכולים להיות: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרונות.

למערכת הומוגנית יכול להיות: פתרון יחיד – הפתרון הטריוויאלי: או אינסוף פתרונות.

איך יודעים מתי יש פתרונות ומתי אין? מדרגים את המטריצה.

דרגת מטריצה: - מספר השורות במטריצה A שאינן 0 לאחר דירוג.

כאשר הוא מספר השורות המטריצה.

דוגמא: .

אם אז המטריצה הפיכה. אחרת, המטריצה לא הפיכה.

אם המטריצה הפיכה (או ) אז יש **פתרון יחיד** למשוואה: .

אם לא, אז אם יש שורת סתירה, שורת אפסים ב A אבל כנגדה, ב b יש מספר אז אין פתרון בכלל.

ואם אין שורת סתירה, כלומר גם ב b יש 0 באותה השורה – יש אינסוף פתרונות בתנאי שמספר המשתנים גדול מה rank של המטריצה.

דוגמא: – אין פתרון כי השורה השלישית היא סתירה   
(היא מייצג את המשוואה: )

אבל: – יש אינסוף פתרונות כי יש שורת אפסים ואז הדרגה של המטריצה היא 2 ומספר המשתנים הוא 3.

מרחב וקטורי:

שדה – קבוצה של מספרים עם פעולות חיבור וכפל המקיימות את התכונות של חיבור וכפל (אסוציאטיביות, קומוטטיביות, חוק הפילוג)

מרחב וקטורי מעל השדה – קבוצת וקטורים המורכבים מהמספרים שבשדה. ויש רק פעולת חיבור בין וקטורים.

הקבוצה מקיימת את התכונות הבאות:

1. סגירות לחיבור: לכל מתקיים:
2. סגירות לכפל בסקלר: לכל מתקיים: .

קבוצה פורשת: קבוצה A של וקטורים תיקרא קבוצה פורשת של V אם כל וקטור הנמצא ב V ניתן להציג אותו ע"י צירוף ליניארי של וקטורי A. סימון: .

דוגמא: . . האם A פורשת את ?

האם לכל ניתן להציג אותו ע"י צירוף ליניארי של וקטורי A?   
כלומר: *. שוב – מערכת 2 משוואות עם 2 נעלמים (a,b)  
נייצג ע"י מטריצה: . אם המטריצה הפיכה אז בהכרח יש פתרון.  
נדרג: – אין שורת אפסים ולכן המטריצה הפיכה. לכן תמיד יהיה פתרון יחיד.*

*מכאן, A פורשת את V.*

*קבוצה בת"ל: קבוצה A של וקטורים תיקרא קבוצה בת"ל אם ניתן לייצג את אחד הוקטורים ב A כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים ב A.*

*דוגמא: האם A קבוצה בת"ל? כן.*

*איך בודקים? שמים את כל הוקטורים של A כשורות במטריצה ומדרגים. אם מקבלים שורת אפסים זה אומר שיש תלות ליניארית ואם אין שורת אפסים אז הם בת"ל.*

*בסיס: קבוצה A של וקטורים תקרא בסיס למרחב V אם:*

1. *היא פורשת את V.*
2. *היא בת"ל.*

*מימד של V: מספר הוקטורים בבסיס A של V. יסומן: .*

*משפט המימדים: אם אז: .*

תתי מרחבים:

תת מרחב של מרחב מקיים את התכונות הבאות:

1. הוא מחרב וקטורי.

אם תתי מרחבים אז:

1. תת מרחב (גדול יותר)
2. תת מרחב קטן יותר.
3. לא בהכרח תת מרחב.

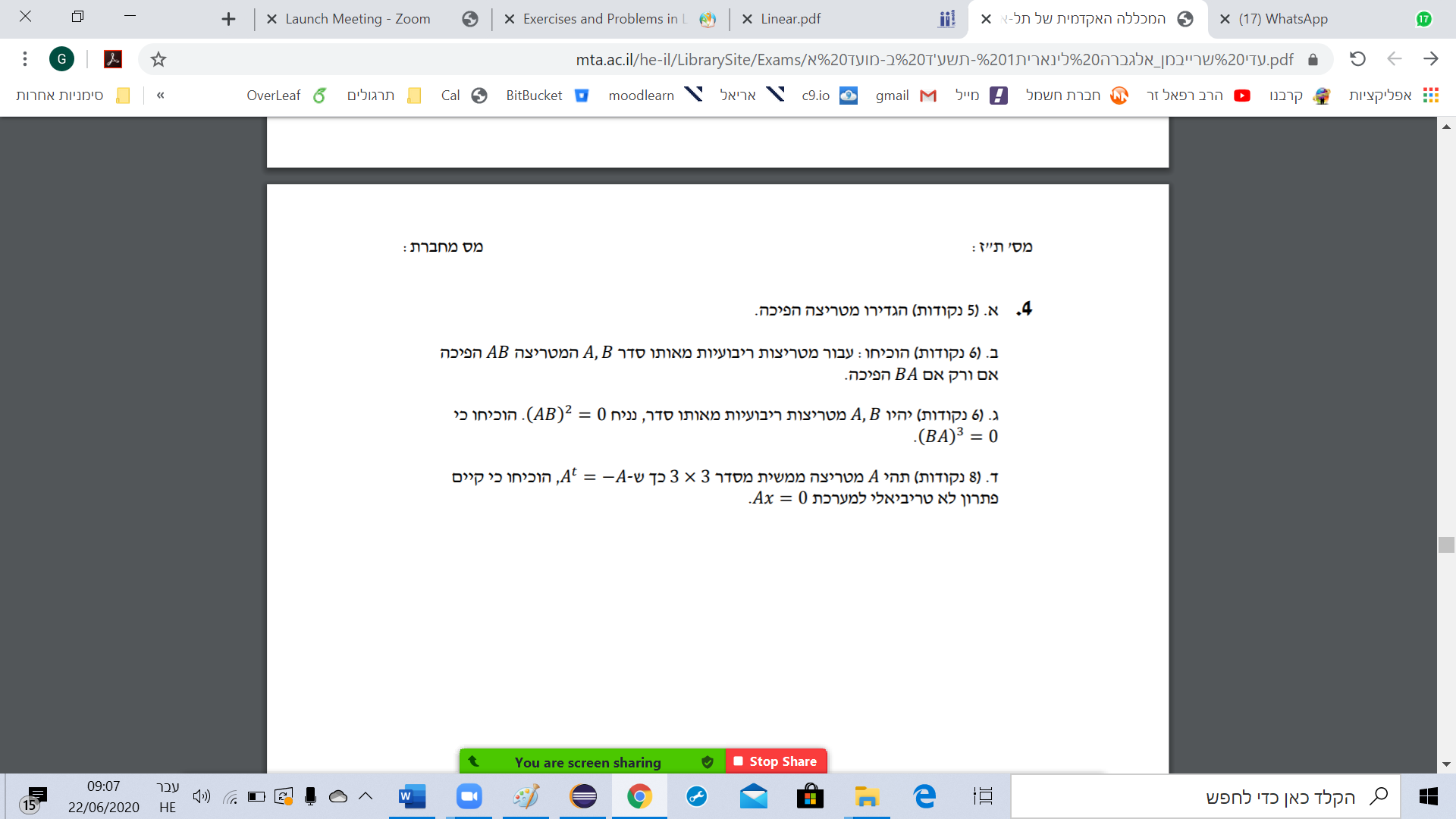
דוגמא: . ,

1. אין סגירות לחיבור כי שלא שייך לא ל U ולא ל W.

מרחב פולינומים: פולינום הוא ביטוי מהצורה: כאשר הוא הסדר של הפולינום.

אפשרי לבטא פולינום כוקטור של מקדמי ה x: ואז החיבור הוא כמו חיבור וקטורים.

תרגילים:



פתרון:

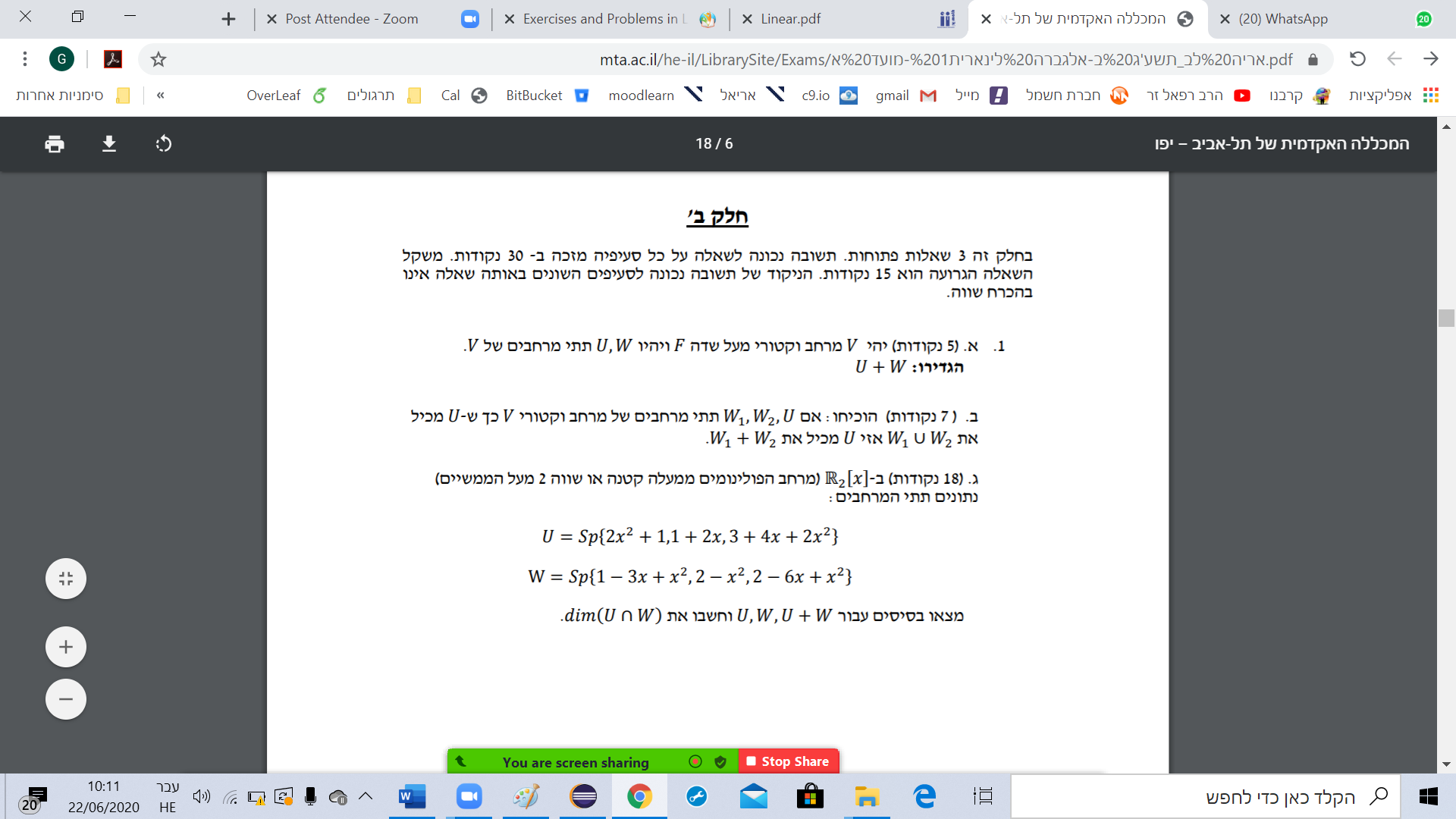
1. מטריצה תקרא הפיכה אם ורק אם קיימת מטריצה כך ש: .  
   בדרך כלל נסמן: .
2. נשתמש במשפט: אם הפיכה אז:   
   אבל:

ולכן: .

1. נניח ש: .   
   מכאן: .
2. נשתמש בדטרמיננטה על 2 צדדי השוויון:

מכאן: ולכן: ומכאן:  
 ולכן: כלומר:

ומכאן: לא הפיכה ולכן תהיה שורת אפסים למערכת ולכן יהיו אינסוף פתרונות (דרגה 2 ומספר המשתנים 3)



1. הגדרה: .
2. הוכחה: נניח ש . צ"ל: .  
   יהא . צ"ל: .  
   לפי הגדרת סכום מרחבים וקטוריים, קיימים כך ש: .

לפי ההנחה: *. מכיוון ש הוא תת מרחב, אז מסגירות לחיבור, ולכן .*

1. *נמצא בסיס ל :  
   אם המרחב נתון כ אז מה שנשאר זה לבדוק האם הוקטורים הפורשים הם בת"ל.  
   נכתוב את המרחב כוקטורים: . נבדוק ת"ל:*

*כלומר הוקטור השלישי תלוי ב 2 האחרים, לכן אם נוריד אותו נקבל קבוצה בת"ל.  
ולכן הקבוצה: היא בסיס ל .  
המימד של הוא 2.*

*נמצא בסיס ל : . נבדוק ת"ל:*

*לא התאפסה שורה ולכן הוקטורים הנ"ל הם בת"ל ולכן היא בסיס ל והמימד של הוא 3.*

*נמצא בסיס ל .*

נשים לב ש: . קיבלנו ש: ומצד שני: .

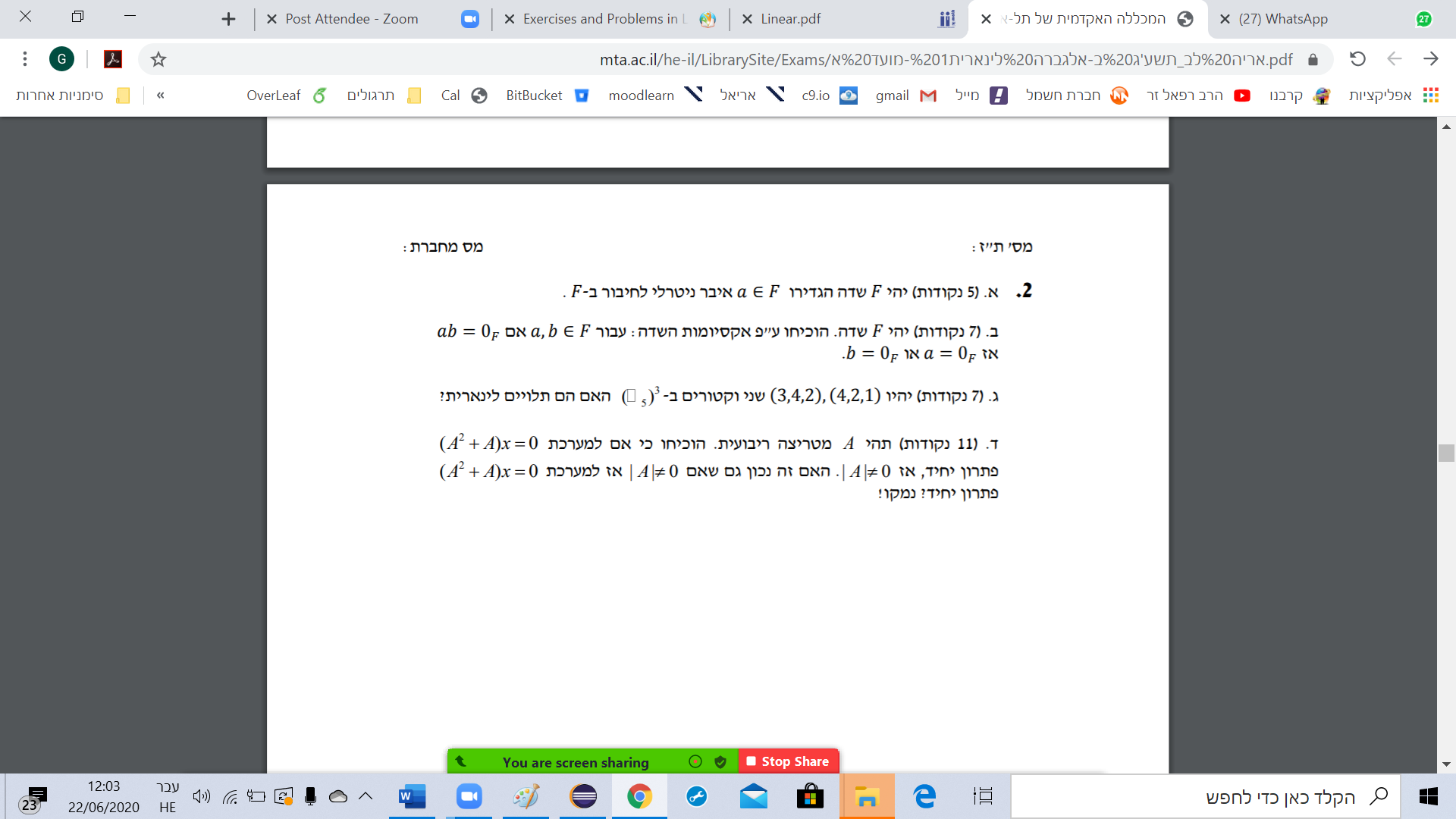
מכאן: הוא גם תת מרחב של . ולכן:

מצד שני, לפי משפט המימדים:

מכאן: . ולכן: ולכן הבסיס של זהה לבסיס של .

לפי משפט המימדים:

נציב: ולכן: .



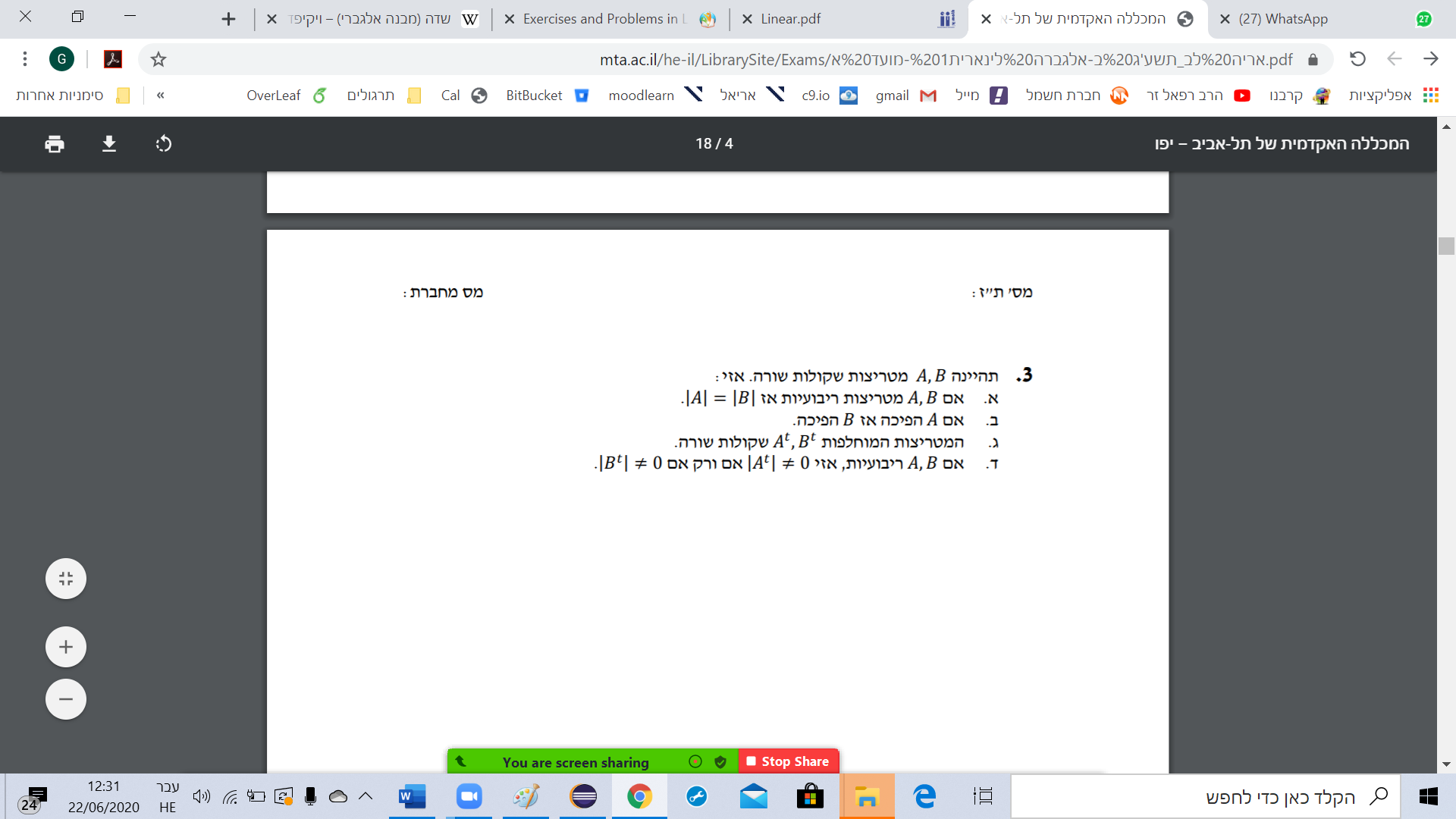
פתרון:

1. ייקרא נטראלי לחיבור אם לכל מתקיים: .
2. אקסיומות השדה הן התכונות שלו:
   1. חוג הפילוג, חילופיות, אסוציאטיביות, איבר נטראלי, איבר יחידה, לכל איבר פרט ל 0 קיים הופכי: .

הוכחה: נניח ש מכאן: *אם סיימנו. אם כן, נניח ש ולכן קיים לו הופכי כפלי: . מכאן: .*

1. *נבדוק ת"ל: ולכן הוקטורים כן ת"ל.*
2. *נשתמש במשפט: למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם (A הפיכה)*

*נתון יש פתרון למערכת: . מכאן, לפי המשפט: ומכאן:   
ולכן: .  
הכיוון השני לא בהכרח נכון, דוגמא נגדית: . מכאן: אבל:   
ולכן: . מכאן, לא הפיכה ולכן יש אינסוף פתרונות למערכת .*



*פתרון:*

*א.לא נכון. דוגמא נגדית: . .*

*ב. למטריצות שקולות שורה מתקיים: .  
אם ב יש שורות אז: אומר ש A הפיכה אבל אז ולכן גם B הפיכה.*

*ג. הן שקולות עמודה ולא שורה.  
דוגמא: . מכאן, שקולות שורה. אבל: אינן שקולות שורה כי: הן ב"ת ליניארית.*

*ד. אם שקולות שורה אז:  
 הפיכה אם ורק אם הפיכה.  
 אם ורק אם*

*אם ורק אם*